Suites

Suites 1
1. Maturitas écrites de 2015 et 2014 2
2. Maturita écrite de 2019 – Problème d'application 10

1. Maturitas écrites de 2015 et 2014

Exercice 1 (2015)

Soit (u_n) la suite définie par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n + 3 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4.
2.
   a. Démontrer, par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n < 6$.
   b. Démontrer, par récurrence, que la suite (u_n) est strictement croissante.
   c. La suite (u_n) est-elle convergente ? Justifier.
3. Le plan est muni d'un repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité graphique 1 cm.
   On considère les droites (D_1): $y = x$ et (D_2): $y = \frac{1}{2}x + 3$.
   En utilisant ces deux droites, représenter graphiquement les cinq premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.
4. Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 6$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique et préciser son premier terme et sa raison.
   b. Exprimer v_n en fonction de n, puis démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n = -8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n + 6$.
   c. En déduire la limite de la suite (u_n).
5. Résoudre dans $\mathbb{R}$ l'inéquation $-8 \times \left(\frac{1}{2}\right)^x + 6 \geq 5{,}9$.
   En déduire la plus petite valeur de $n \in \mathbb{N}$ telle que $u_n \geq 5{,}9$.

Exercice 2 (2015)

Soit f la fonction définie sur $]-\infty; 8[$ par $f(x) = \frac{16}{8-x}$.

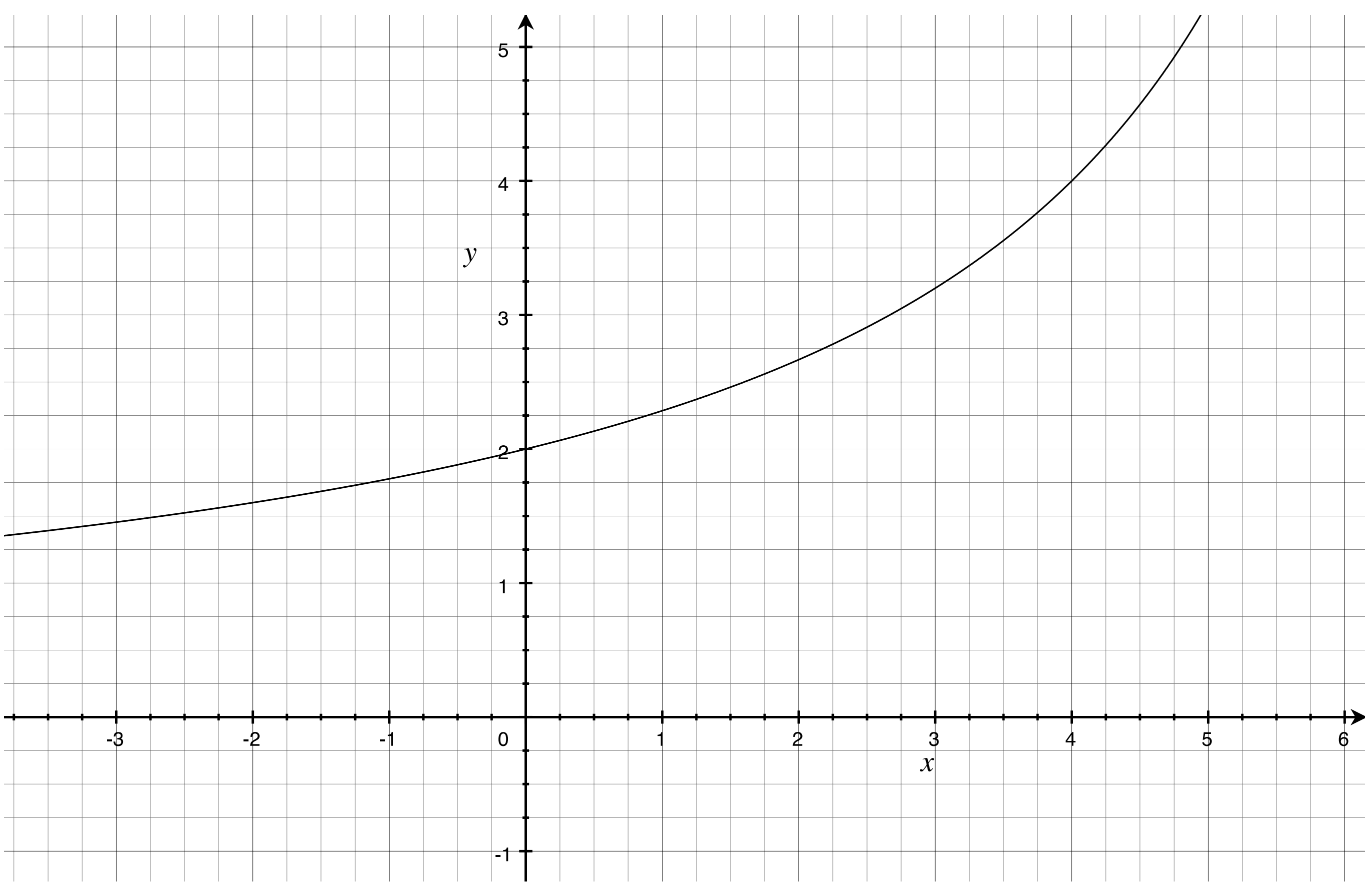
On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = -2 \\ u_{n+1} = \frac{16}{8-u_n} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N} \end{cases}$.

1. La courbe représentative de la fonction f est donnée en annexe. Après avoir tracé la droite d´équation $y = x$, construire les cinq premiers termes de la suite (u_n).
2. En utilisant le raisonnement par récurrence, démontrer que $u_n < 4$ pour tout $\in \mathbb{N}$.
3. Montrer que la suite (u_n) est strictement croissante.
4. Qu´est-ce qu´on peut déduire des questions 2 et 3 ? Justifier.
5. Déterminer la limite de la suite (u_n).

On considère la suite (v_n) définie par $v_n = \frac{1}{u_n-4}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

6. Montrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison $-\frac{1}{4}$.
7. En déduire v_n puis u_n en fonction de n.
8. En utilisant le résultat de la question 7, retrouver la limite de la suite (u_n).

ANNEXE



Exercice 3 (2015)

On considère les suites (u_n) et (v_n) définies pour tout entier naturel n par

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 3 - \frac{1}{u_n - 5} \end{cases} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{1}{u_n - 4}.$$

1) Calculer u_1, u_2, u_3.

2) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $u_n < 4$.
3) Étudier la monotonie de la suite (u_n).
4) En déduire que (u_n) est convergente et calculer sa limite.
5) Monter que (v_n) est une suite arithmétique de raison -1 et que $v_0 = \frac{-1}{3}$.
6) Exprimer v_n en fonction de n puis u_n en fonction de n.
7) En utilisant le résultat de la question 7, retrouver la limite de la suite (u_n).

Exercice 4 (2015)

Soit (u_n) la suite définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = \frac{9}{6 - u_n} \end{cases}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \quad .$$

1) Calculer u_1, u_2 et u_3. On exprimera chacun de ces termes sous forme d'un nombre décimal arrondi à 10^{-2} près·

2)
   a) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 3$.
   b) Démontrer que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{(3-u_n)^2}{6-u_n}$.
   En déduire que la suite (u_n) est strictement croissante.
   c) Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3) On considère la suite (v_n) définie pour tout n entier naturel par: $v_n = \frac{1}{u_n - 3}$.
   a) Démontrer que (v_n) est une suite arithmétique de raison $-\frac{1}{3}$ et donner son premier terme v_0.
   b) En déduire l'expression de v_n puis celle de u_n en fonction de n.
   c) Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 (2014)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{2u_n + 1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1°) Calculer u_1 et u_2.

2°) Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4u_n + 2}$.

3°) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 < u_n < 1$.

4°) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

5°) a) En utilisant les résultats précédents justifier que la suite (u_n) est une suite convergente.

b) Calculer la limite de la suite (u_n).

6°) Soit (v_n) la suite définie par $v_n = \frac{u_n}{1 - u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Exprimer v_{n+1} en fonction de v_n. En déduire que (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et préciser son premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*.

c) Exprimer la somme $S_n = v_0 + v_1 + ... + v_n$ en fonction de *n*.

d) Déterminer le plus petit entier naturel *n* tel que $S_n > 1000$.

Exercice 6 (2014)

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_0 = \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = \frac{3u_n}{1+2u_n}$.

1°) a) Calculer u_1 et u_2.

b) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

2°) On admet que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n < 1$.

a) Démontrer que la suite (u_n) est strictement croissante.

b) Démontrer que la suite (u_n) converge.

c) Déterminer la limite de (u_n).

3°) On pose $v_n = \frac{u_n}{1-u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique dont on déterminera la raison et le premier terme.

b) Exprimer v_n en fonction de *n*.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n. En déduire que pour tout entier naturel *n*, $u_n = \frac{3^n}{3^n+1}$.

d) Déterminer $\lim_{n\to+\infty} u_n$ et retrouver le résultat de la question 2°) c).

Exercice 7 (2014)

Soit (u_n) la suite définie par $u_0 = 5$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_{n+1} = \dfrac{4u_n - 1}{u_n + 2}$.

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]-2;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{4x-1}{x+2}$. On donne en ANNEXE une partie de la courbe représentative (C) de f ainsi que la droite (D) d'équation $y = x$.

1°) a) En utilisant (C) et (D), représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n) en laissant apparaître les traits de construction.

b) Quelles hypothèses peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

2°) a) Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n > 1$.

b) Déterminer le sens de variation de (u_n).

c) Déduire des questions précédentes que (u_n) est convergente et calculer sa limite.

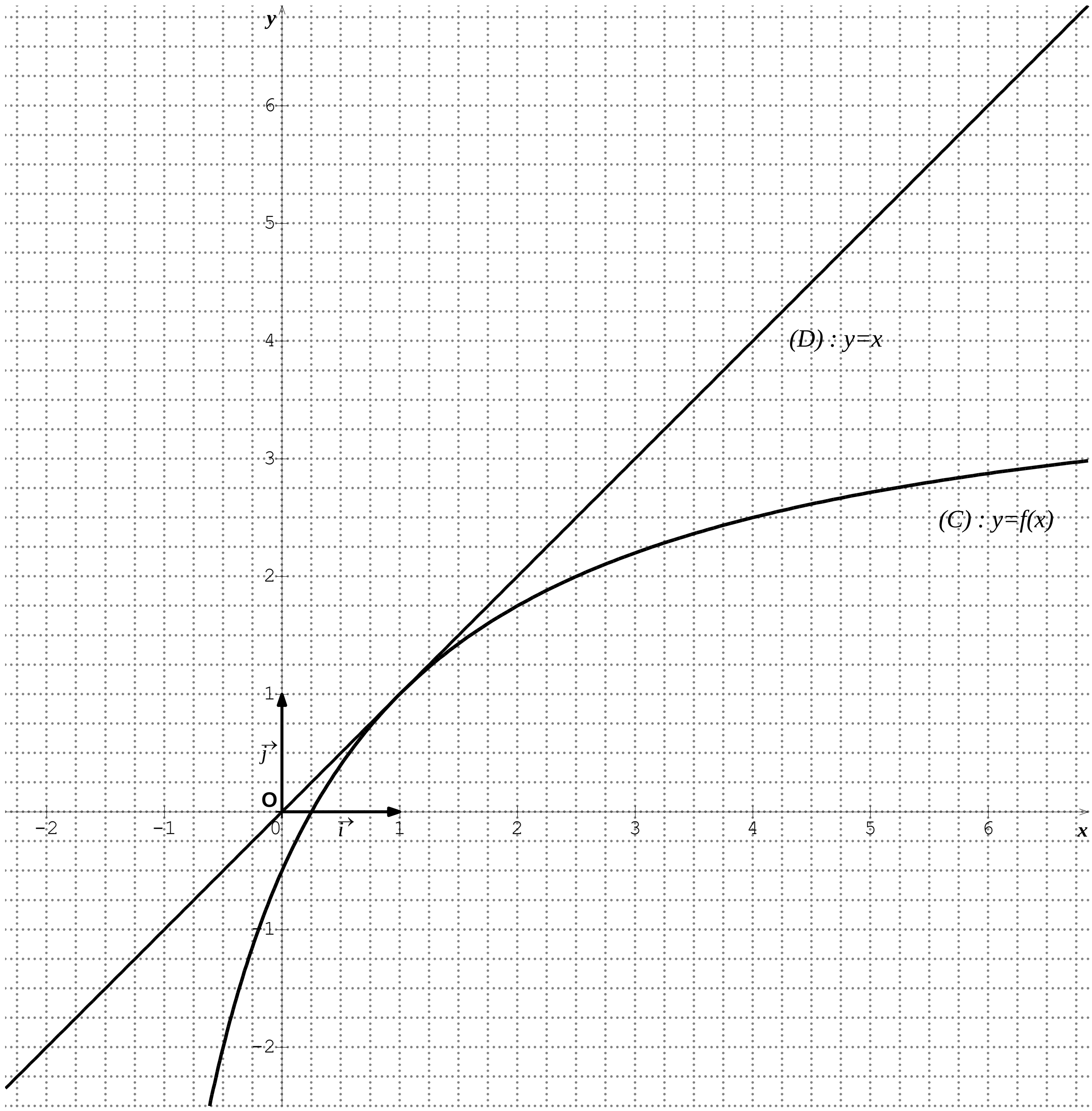
3°) On considère la suite (v_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = \dfrac{1}{u_n - 1}$.

a) Montrer que la suite (v_n) est une suite arithmétique de raison $\dfrac{1}{3}$ et préciser son premier terme.

b) En déduire l'expression de v_n en fonction de *n*.

c) Exprimer u_n en fonction de v_n puis u_n en fonction de *n*. En déduire la limite de la suite (u_n).

ANNEXE



Exercice 8 (2014)

On définit la suite (u_n) par $\begin{cases} u_0 = 9 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}u_n + 2 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Soient f la fonction définie sur l'intervalle $[0;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{3}x + 2$ et (C) sa courbe représentative dans un repère orthonormal $(O;\vec{i}, \vec{j})$, d'unité graphique 1 cm .

1°) Construire (C) et la droite (D) d'équation $y = x$ dans $(O;\vec{i}, \vec{j})$.

2°) a) En utilisant (C) et (D), représenter graphiquement les quatre premiers termes de la suite (u_n).
b) Quelles conjectures peut-on formuler en ce qui concerne le sens de variation et la convergence éventuelle de la suite (u_n) ?

3°) a) Calculer u_1 et u_2.
b) En déduire que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.

4°) a) Démontrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout *n* de $\mathbb{N}$, $3 < u_n \leq 9$.
b) Déterminer le sens de variation de la suite (u_n).
c) En déduire que (u_n) converge et déterminer sa limite.

5°) On définit la suite (v_n) par $v_n = u_n - 3$ pour tout *n* de $\mathbb{N}$.
a) Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{3}$.
b) Exprimer v_n en fonction de *n*, puis calculer la limite de (v_n).
c) En déduire u_n en fonction de *n* et retrouver le résultat de la question 4°)c) relatif à la limite de la suite (u_n).

2. Maturita écrite de 2019 – Problème d’application

Le gestionnaire d´une salle de concert constate que, chaque année, le nombre d´abonnés est constitué de 70% des abonnés de l´année précédente, auxquels s´ajoutent 210 nouveaux abonnés.
Le nombre d´abonnés en 2016 était de 600.

1. Calculer le nombre d´abonnés en 2017 et 2018.
2. On note a_n le nombre d´abonnés en $2016 + n$.
   Exprimer a_{n+1} en fonction de a_n.
3. On définit la suite (u_n) définie par : $\begin{cases} u_0 = 600 \\ u_{n+1} = 0{,}7u_n + 210 \end{cases}$

   pour tout $n \in \mathbb{N}$.

   Démontrer par récurrence que :
   a) (u_n) est majorée par 700
   b) (u_n) est strictement croissante.

4. Que peut-on en déduire pour la convergence de la suite (u_n) ?

5. On définit la suite (v_n) pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 700$.
   a) Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 0,7.
   Préciser son premier terme.
   b) Justifier, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = 700 - 100 \cdot 0{,}7^n$
   c) Soit n un entier naturel. Résoudre l´inéquation $u_n \geq 697$
   d) En déduire en quelle année le nombre d´abonnés dépassera 697.